DIE HARMONISCHE CONFIGURATION 24_4.

INAUGURAL-DISSERTATION
DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT
ZU
FREIBURG IM BREISGAU
ZUR
ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE
VORGELEGT VON

ALWIN VIETOR
AUS WIESBADEN.

FREIBURG i. B.
UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON CHR. LEHMANN.
1884.

Herrn Prof. Dr. REYE

in Strassburg

in

dankbarer Verehrung.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550801_0173

Vorwort.

Herrn Professor Reye in Strassburg verdanke ich die Anregung zu der Beschäftigung mit jenen eigenthümlichen von ihm mit dem Namen Configurationen belegten Gruppen von Punkten und Geraden in der Ebene und im Raume und von Punkten und Ebenen im Raume, bei denen jedes Element der einen Art als Träger gleichvieler Elemente der anderen Art erscheint. Das Studium der Configuration 12_3 der Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln*) führte mich dabei zu der „harmonischen" Configuration 24_4, mit welcher sich die vorliegende Arbeit beschäftigt. Diese wurde im Sommer 1881 in Strassburg beendet. Bei der Ausarbeitung derselben liess mir Herr Professor Reye in freundlichster Weise seinen Rath zu Theil werden, wofür ich demselben hiermit meinen aufrichtigsten Dank ausspreche. Eine kurze Zusammenstellung der Resultate der Arbeit erschien auf gütige Veranlassung des Herrn Professor Lindemann in Königsberg, damals in Freiburg i. B., bereits 1882 in den Berichten der naturforschenden Gesellschaft in Freiburg

*) Reye, die Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme 1879. S. 54. Cyparissos Stephanos, Bulletin des sciences math. et astr., Serie II. 3. Veronese, Atti della R. Acc. dei Lincei 1880, vol. IV°, ser. 3ª.

i. B. (VIII. 2.). Mittlerweile veröffentlichte Herr Professor Reye eine erschöpfende Abhandlung über die Configuration der Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln, welche auch meinen kleinen Aufsatz in den Freiburger Berichten erwähnt und auf die nahe Verwandtschaft jener Configuration mit der von mir untersuchten hinweist*). Sie geht in ihrer Vollständigkeit bezüglich der projectiven Eigenschaften beider Configurationen über meine Arbeit hinaus und enthält unter Anderem einzelne Sätze, auf welche mich seiner Zeit Herr Professor Reye aufmerksam gemacht hatte, und die sich daher auch in meiner erst jetzt zum Druck gelangenden Arbeit bewiesen finden. Indem ich auf die hierauf bezügliche Anmerkung in der Reye'schen Abhandlung verweise, bringe ich meine Arbeit in ihrer ursprünglichen Abfassung zum Abdruck.

Ich muss noch bemerken, dass jener kurze Auszug in den Freiburger Berichten am Schluss ein Versehen enthält, indem jede der dort besprochenen 9 geradlinigen Flächen zweiter Ordnung von jeder der sie nicht berührenden 8 Configurationsebenen in einem Kegelschnitt geschnitten wird, in welchem sie nicht eine, sondern zwei der 24 nicht geradlinigen Flächen zweiter Ordnung berührt.

*) Reye, die Hexaeder- und die Octaeder-Configurationen Acta mathematica I S. 97.

1.

Zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, welche Schnitte eines Dreikants sind, so dass die Geraden $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ durch einen Punkt C_4 gehen, bestimmen in der nachstehend beschriebenen Weise eine Configuration 24_4.

Die Punkte

$\overline{A_1B_2} \cdot \overline{A_2B_1} \equiv C_3$, $\overline{A_2B_3} \cdot \overline{A_3B_2} \equiv C_1$, $\overline{A_3B_1} \cdot \overline{A_1B_3} \equiv C_2$

bilden ein drittes Dreieck $C_1C_2C_3$, welches zu den beiden ersten dieselbe relative Lage einnimmt, wie diese zu einander. Denn $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}$, $\overline{A_3C_3}$ sind die resp. Schnittlinien der Ebenenpaare $\underline{A_3A_1B_2}$, $\underline{A_1A_2B_3}$; $\underline{A_1A_2B_3}$, $\underline{A_2A_3B_1}$; $\underline{A_2A_3B_1}$, $\underline{A_3A_1B_2}$ und treffen sich daher in einem Punkte B_4. Ebenso haben $\overline{B_1C_1}$, $\overline{B_2C_2}$, $\overline{B_3C_3}$ einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt A_4.

Die 3 Cent a A_4, B_4, C_4 liegen in einer Geraden h; denn da $\overline{A_1B_1C_4}$, $\overline{B_1C_1A_4}$, $\overline{C_1A_1B_4}$ in einer, $\overline{A_2B_2C_4}$, $\overline{B_2C_2A_4}$, $\overline{C_2A_2B_4}$ in einer zweiten und $\overline{A_3B_3C_4}$, $\overline{B_3C_3A_4}$, $\overline{C_3A_3B_4}$ in einer dritten Ebene liegen, so ist $\overline{A_4B_4C_4}$ die gemeinschaftliche Schnittlinie dieser 3 Ebenen. Andererseits schneiden sich die Ebenen der 3 Dreiecke in einer Geraden h', welche die 3 Schnittpunkte entsprechender Seitenpaare der 3 Dreiecke enthält.

2.

Es liegen somit 3 Tetraeder vor

$(A) = A_1A_2A_3A_4$, $(B) = B_1B_2B_3B_4$, $(C) = C_1C_2C_3C_4$,

deren Seitenflächen wir $\overline{A_2A_3A_4} \equiv \alpha_1$, $\overline{A_3A_4A_1} \equiv \alpha_2$ u. s. w. nennen wollen. Jede Kante von einem dieser Tetraeder schneidet je 2 Gegenkanten der beiden anderen Tetraeder.

Die Verbindungslinien

$$\overline{A_1B_1},\ \overline{A_2B_2},\ \overline{A_3B_3},\ \overline{A_4B_4}$$

gehen durch C_4, d. h. die 2 Tetraeder (A) und (B) liegen von C_4 aus perspectivisch, und die Schnittlinien entsprechender Seitenflächen

$$\overline{\alpha_1\beta_1},\ \overline{\alpha_2\beta_2},\ \overline{\alpha_3\beta_3},\ \overline{\alpha_4\beta_4}$$

liegen daher in einer Ebene, nämlich in der dem Punkt C_4 gegenüberliegenden Ebene γ_4 des Tetraeders (C). Die beiden Tetraeder (A) und (B) haben aber in gleicher Weise auch bezüglich C_3 und γ_3 und der andern Punkte und gegenüberliegenden Flächen des dritten Tetraeders perspectivische Lage, und allgemein gilt der Satz:

Je 2 der 3 Tetraeder (A), (B), (C) liegen bezüglich jedes Punktes und der gegenüberliegenden Ebene des dritten perspectivisch.

Also liegen die Eckpunkte der 3 Tetraeder zu je 3 in 16 Geraden h, und ihre Seitenflächen schneiden einander zu je 3 in 16 Geraden h'; durch jeden Eckpunkt gehen mithin 4 Geraden h, und in jeder Seitenfläche liegen 4 Geraden h'.

Zugleich ergibt sich:

Jeder der 3 auf einer Geraden h liegenden Eckpunkte ist von dem Schnittpunkt dieser Geraden mit der jenem

Punkt gegenüberliegenden Tetraederfläche durch die beiden anderen Ecken harmonisch getrennt, und jede der 3 durch eine Gerade h' gehenden Tetraederflächen ist von der Ebene, welche den ihr gegenüberliegenden Eckpunkt mit der Geraden h' verbindet, durch die beiden anderen Tetraederflächen harmonisch getrennt.

3.

Wenn man aus den Kanten eines der 3 Tetraeder z. B. (A) irgend einen Punkt eines anderen z. B. B_1 auf die resp. gegenüberliegenden Kanten projicirt, so erhält man 6 Punkte P_{ik}, von denen z. B. P_{12} auf $\overline{A_1A_2}$ liegt. Construirt man zu diesen Punkten die von ihnen durch die Eckpunkte des Tetraeders (A) harmonisch getrennten Punkte, so ergeben sich weitere 6 Punkte P'_{ik} und diese liegen in einer Ebene, nämlich in der dem Punkt B_1 gegenüberliegenden Ebene β_1.

Projicirt man anstatt des Punktes B_1 einen anderen Punkt z. B. C_1 aus den Kanten des Tetraeders (A) auf die gegenüberliegenden Kanten, so ergeben sich in derselben Weise die nämlichen 12 Punkte P; denn eine Ebene welche durch eine Kante eines der 3 Tetraeder geht und einen Eckpunkt eines zweiten Tetraeders enthält, geht stets nicht nur durch einen zweiten Eckpunkt dieses, sondern auch durch 2 Punkte des dritten Tetraeders. So enthält die Ebene $\overline{A_3A_4B_1}$, welche B_1 auf $\overline{A_1A_2}$ projicirt, noch die Punkte B_2, C_1, C_2; die Projectionen derselben aus $\overline{A_3A_4}$ auf $\overline{A_1A_2}$ fallen also in P_{12} zusammen.

Daraus folgt zunächst, dass die 12 Punkte P auch paarweise auf den Kanten der beiden Tetraeder (B) und

(C) liegen und durch die Eckpunkte derselben harmonisch getrennt sind. Ferner ergiebt sich zugleich, dass die 18 Kanten k der 3 Tetraeder sich zu dreien in den 12 Punkten P treffen.

Analog bestimmen die Schnittpunkte der Kanten eines der 3 Tetraeder z. B. (A) und irgend einer Seitenfläche eines anderen z. B. β_1 mit den resp. gegenüberliegenden Kanten 6 Ebenen π_{ik}, von denen z. B. π_{12} durch $\overline{a_1 a_2}$ geht. Die 6 von diesen Ebenen durch die Seitenflächen des Tetraeders (A) harmonisch getrennten Ebenen π'_{ik} gehen durch einen Punkt, nämlich durch den Punkt B_1.

Diese 12 Ebenen π gehen auch paarweise durch die Kanten der beiden Tetraeder (B) und (C) und sind dort durch die beiden Ebenen des betreffenden Tetraeders harmonisch getrennt.

Somit haben wir den wichtigen Satz:

Auf jeder der 18 Kanten der 3 Tetraeder (A), (B), (C) liegen 4 Punkte, welche eine harmonische Gruppe bilden, und jede derselben ist Schnittlinie von 4 harmonischen Ebenen.

4.

Da sich in jedem Punkt P nach dem Obigen 3 den verschiedenen Tetraedern angehörige Kanten schneiden, so ist ein solcher Punkt gemeinschaftlicher Schnittpunkt von je 2 Ebenen α, β und γ, wie auch jede Ebene π dementsprechend je 2 Punkte A, B und C enthält.

Wir haben bereits gesehen, dass auch durch jeden der Punkte A, B und C 6 Ebenen π gehen, und dass

jede der Ebenen α, β, und γ 6 Punkte P enthält. Berücksichtigt man ausserdem, dass nicht bloss durch jeden Punkt P, sondern auch durch jeden Eckpunkt der 3 Tetraeder 3 Kanten gehen und dass in jeder Seitenfläche derselben 3 Kanten enthalten sind, so ist klar:

Die 24 Punkte A, B, C und P bilden mit den 24 Ebenen α, β, γ und π und den 18 Kanten k eine Configuration 24_4.

Jeder der 24 Punkte ist Schnittpunkt von 3 der 18 Geraden und 9 der 24 Ebenen, in jeder dieser Ebenen liegen 3 der 18 Kanten und 9 der 24 Punkte und jede Kante ist Verbindungslinie von 4 Punkten und Schnittlinie von 4 Ebenen.

Ausserdem sind die Elemente der Configuration so gruppirt, dass die 24 Punkte zu je 3 auf den 32 Geraden h und h' liegen, in denen sich zugleich die 24 Ebenen zu je 3 schneiden.

In jeder der 24 Ebenen liegen 4 Geraden h oder h'; dieselben bilden ein vollständiges Vierseit, dessen 6 Eckpunkte und 3 Diagonalen zu der Configuration gehören. Analog gehen durch jeden Punkt 4 Geraden h oder h'; die 6 Ebenen und die drei Schnittlinien gegenüberliegender Ebenen des von ihnen gebildeten vollständigen Vierkants gehören ebenfalls zu der Configuration.

5.

Wir sind so direct zu der Configuration 24_4 gelangt, ohne jene einfachere Cofiguration 12_3 erwähnt zu haben. In Wirklichkeit haben wir es indessen mit 2 Configurationen 12_3 zu thun, welche einander dreifach

eingeschrieben und umschrieben sind und in ihrer Gesammtheit die vorliegende Configuration 24_4 bilden. Die 12 Punkte A, B, C gehören mit den 12 Ebenen π und den 16 Geraden h der einen, die 12 Punkte P mit den 12 Ebenen α, β, γ und den 16 Geraden h′ der anderen Configuration 12_3 an.

6.

Nennt man 2 Punkte einer räumlichen Configuration, welche nicht mit einander durch eine Configurationsgerade verbunden sind, und 2 Ebenen, welche sich nicht in einer Configurationsgeraden schneiden, von einander *separirt,* so können wir bezüglich einer Configuration 12_3 sagen:

Die 12 Punkte der Configuration 12_3 zerfallen in 3 Quadrupel separirter Punkte, d. h. sie bilden 3 Tetraeder, deren Seitenflächen und Kanten nicht zur Configuration 12_3 gehören; und die 12 Ebenen zerfallen in 3 Quadrupel separirter Ebenen, indem sie 3 Tetraeder bilden, deren Eckpunkte und Kanten nicht zur Configuration 12_3 gehören. Die 18 Kanten der ersteren 3 Tetraeder sind identisch mit denen der 3 letzteren, es sind die 18 Geraden der Configuration 24_4.

Dagegen bilden die 12 Seitenflächen der ersteren 3 Tetraeder mit den 12 Eckpunkten der letzteren eine zweite Configuration 12_3, welche die erste zu der Configuration 24_4 ergänzt.

Die 12 Ebenen der einen Configuration 12_3 sind die *Diagonalebenen* der anderen, indem sie je 3 Punkte, aber keine der 16 Geraden derselben enthalten, und die

12 Punkte der einen liegen in je 3 Ebenen, aber in keiner Geraden der anderen.

Daraus ergibt sich, dass sich die 18 Kanten einer Configuration 24_4 auf 2 Arten zu drei Tetraedern anordnen lassen. Entweder werden die 12 Ecken von den Punkten der einen Configuration 12_3 gebildet und die Seitenflächen von den Ebenen der anderen oder umgekehrt.

Sind 2 Geraden bei der einen Anordnung gegenüberliegende Kanten eines Tetraeders, so sind sie dies auch bei der zweiten; die 18 Geraden k bilden also 9 Paare gegenüberliegender Geraden der Configuration 24_4, und somit können je 2 Elemente, die in einem der 6 Tetraeder der Configuration 24_4 einander gegenüberliegen, auch bezüglich der Configuration selbstgegenüberliegend genannt werden. Zugleich liegt auch jeder Geraden h eine der Geraden h' gegenüber, wie $\overline{A_4B_4C_4}$ und $\overline{\alpha_4\beta_4\gamma_4}$, indem sie als Träger gegenüberliegender Ebenen und Punkte erscheinen.

7.

Jedes der 6 Tetraeder kann als Kugelcentren-Tetraeder aufgefasst werden, d. h. als Tetraeder, dessen 4 Ecken die Mittelpunkte von 4 Kugeln sind, deren 12 Aehnlichkeitspunkte die Punkte einer der beiden Configurationen 12_3 bilden und zwar derjenigen, zu welcher die 4 Flächen, aber nicht die 4 Eckpunkte des Tetraeders gehören.

Die Configuration der Aehnlichkeitspunkte von 4 Kugeln enthält nämlich die 6 Punkte, in welchen die 6 Kanten des Kugelcentren-Tetraeders von einer (Aehnlich-

keits-)Ebene geschnitten werden, sowie diejenigen 6 Punkte der Kanten, welche von dieser Ebene durch je 2 Eckpunkte des Tetraeders harmonisch getrennt sind. Diese 12 Punkte haben also dieselbe relative Lage zu dem Kugelcentren-Tetraeder wie die Punkte P der Configuration 24_4 zu dem Tetraeder (A) und sie bilden daher eine Configuration 12_3.

Stellt man einer Kugel ein System von 2 parallelen Ebenen zur Seite — eine Platte —, so lässt sich hierzu folgender gleichsam reciproke Satz aufstellen:

Jedes der 6 Tetraeder einer Configuration 24_4 kann aufgefasst werden als Tetraeder, dessen 4 Seitenflächen die Mitten von 4 Paaren paralleler Ebenen sind, welch' letztere durch die 12 Paare paralleler Geraden, in denen sie sich schneiden, die 12 Ebenen einer der beiden Configurationen 12_3 bestimmen und zwar derjenigen, zu welcher die 4 Eckpunkte, aber nicht die 4 Flächen des Tetraeders gehören.

4 Kugeln und 4 Paare paralleler Ebenen bestimmen also eine Configuration 24_4.

8.

Durch die 4 Punkte eines Quadrupels separirter Punkte gehen sämmtliche 16 Geraden der diese Punkte enthaltenden Configuration 12_3 und analog sind dieselben auch in jedem Quadrupel separirter Ebenen enthalten.

Da ferner 2 gegenüberliegende Kanten k einer Configuration 24_4 von jeder der beiden zugehörigen Configurationen 12_3 je ein Quadrupel separirter Punkte enthalten, so werden somit 2 solche einander gegenüberlie-

gende Kanten von sämmtlichen 32 Geraden h und h′ geschnitten, nämlich jede von 8 Geraden h und 8 Geraden h′.

Je 12 Geraden einer Configuration 12_3, welche durch 3 Punkte eines Quadrupels separirter Punkte gehen, also z. B. die durch A_1, A_2, A_3 gehenden Geraden h, sind die Kanten eines Hexaeders, dessen Diagonalen die 4 übrigen Geraden der Configuration sind und sich daher in dem vierten Punkt A_4 jenes Quadrupels schneiden. Eine Configuration 12_3 enthält mithin 12 solche Hexaeder. Die 3 Quadrupel separirter Ebenen bilden 3 den 12 Hexaedern gemeinschaftliche Diagonaltetraeder.

Analog sind je 12 Geraden der Configuration 12_3, welche in 3 Ebenen eines Quadrupels separirter Ebenen liegen, also z. B. die 12 in α_1, α_2, α_3 liegenden Geraden h′, die Kanten eines Hexagons oder Octaeders, dessen Schnittlinien gegenüberliegender Flächen die 4 übrigen in der vierten Ebene α_4 jenes Quadrupels liegenden Geraden der Configuration sind. Eine Configuration 12_3 enthält 12 solche Octaeder, deren 3 allen gemeinschaftliche Diagonaltetraeder von den 3 Quadrupeln separirter Punkte der Configuration gebildet werden.

Zu jedem Punkt z. B. A_4 und seiner gegenüberliegenden Ebene α_4 einer Configuration 24_4 gehören hiernach ein Hexaeder und ein Octaeder; die 6 Ecken des letzteren liegen in den 6 Seitenflächen des ersteren. Also folgt:

Die Configuration 24_4 enthält 24 Hexaeder und 24 Octaeder; die 12 Octaeder der einen Configuration

12_3 sind je einem der 12 Hexaeder der anderen 12_3 eingeschrieben.

9.

Nimmt man einen Punkt der Configuration 24_4 z. B. A_1 zum Involutionscentrum und die gegenüberliegende Ebene α_1 zur Involutionsebene eines involutorischen räumlichen Systems, so ist in letzterem die Configuration 24_4 sich selbst zugeordnet.

Dies geht direct daraus hervor, dass die Tetraeder (B) und (C) bezüglich A_1 und α_1 perspectivische Lage haben. Die Punkte B entsprechen den Punkten C, und die Ebenen β den Ebenen γ; also entsprechen einander die Kanten der Tetraeder paarweise, und somit sind sowohl die Punkte P als auch die Ebenen π einander paarweise zugeordnet. Es ergibt sich also:

Die Configuration 24_4 und die beiden Configurationen 12_3 sind in 24 verschiedenen perspectiv-involutorischen räumlichen Systemen sich selbst zugeordnet.

10.

Aber auch in jedem geschaart-involutorischen System, dessen beide Axen mit 2 einander gegenüberliegenden Kanten z. B. $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{A_3A_4}$ zusammenfallen, entsprechen die Configuration 24_4 und die beiden Configurationen 12_3 zich selbst. Jede der beiden Geraden A_1A_2, $\overline{A_3A_4}$ wird nämlich in den 4 Configurationspunkten die sie enthält, von je 2 der übrigen 16 Kanten k geschnitten, nämlich von den übrigen Kanten der beiden Tetraeder, welche die beiden Geraden A_1A_2, A_3A_4 gemeinschaftlich zu gegenüberliegenden Kanten haben. Auf

jeder dieser 8 Kanten liegen 2 durch die Schnittpunkte mit den beiden angenommenen Geraden harmonisch getrennte Punkte, welche beide derselben 12_3 angehören.

Das analoge gilt von den Ebenen der Configuration. Also folgt:

Es gibt 9 geschaart-involutorische Systeme, in denen die Configuration 24_4 und die beiden Configurationen 12_3 sich selbst entsprechen.

11.

Ordnet man jedem von 3 Punkten eines Quadrupels separirter Punkte einer Configuration 12_3 eine der beiden durch ihn gehenden Ebenen eines beliebigen der Quadrupel separirter Ebenen zu, so ist dadurch ein Nullsystem bestimmt, in welchem die Configuration 12_3 und die zugehörige Configuration 24_4 sich selbst zugeordnet sind.

Wir können z. B. jedem der Punkte A_1, A_2, A_3, welche mit A_4 ein Quadrupel separirter Punkte bilden, eine der beiden durch ihn gehenden Ebenen des Quadrupels separirter Ebenen π_{23}, π'_{23}, π_{14}, π'_{14} zuweisen.

Nach 3. gehen π_{14} und π'_{14} durch $\overline{a_1 a_4}$ oder, was dasselbe ist, durch $\overline{A_2 A_3}$, π_{23} und π'_{23} gehen durch $\overline{A_1 A_4}$ Die verlangte Zuordnung lässt sich also auf vier Arten bewerkstelligen; lassen wir A_2 der Ebene π_{14} entsprechen, so müssen wir A_3 der Ebene π'_{14} zuweisen und umgekehrt, während A_1 jeder der beiden Ebenen π_{23} oder π'_{23} zugeordnet werden darf.

Es mögen z. B. die Punkte A_1, A_2, A_3 den resp. Ebenen π_{23}, π_{14}, π'_{14} entsprechen.

Dann sind z. B. die Geraden $\overline{A_1B_3C_2}$, $\overline{A_1B_2C_3}$ und $A_1\overline{A_1}$, weil sie durch A_1 gehen und in der Nullebene π_{23} dieses Punktes liegen, Leitstrahlen des Nullsystems, und dasselbe gilt von den Geraden $\overline{A_2B_2C_4}$, $\overline{A_2B_3C_1}$, A_2A_3 sowie $\overline{A_3B_1C_2}$, $\overline{A_3B_4C_3}$. Liegen zwei dieser Geraden in einer Ebene, so ist ihr Schnittpunkt der Nullpunkt dieser Ebene. So ist z. B. B_3 als Schnittpunkt von $\overline{A_1B_3C_2}$ und $\overline{A_2B_3C_1}$ der Nullpunkt der Ebene $\overline{A_1A_2B_3}$ oder π_{31}, und B_2, C_2, C_3 sind die resp. Nullpunkte der Ebenen π'_{34}, π'_{24}, π_{24}. Die Nullebenen der Punkte A_4, B_1, B_4, C_1, C_4 sind nicht in derselben Weise direct bestimmt, da sie nur auf je einem der genannten Leitstrahlen liegen, wie B_1 auf $\overline{A_3B_1C_2}$; da aber B_1 auch in der Ebene $A_1\overline{A_2B_2}$ liegt, deren Nullpunkt B_2 ist, so ist $\overline{B_1B_2}$ ebenfalls Leitstrahl des Nullsystems, und $\overline{B_1B_2}A_3$ oder π'_{12} ist die Nullebene des Punktes B_1; ebenso sind die Ebenen π_{12}, π'_{13}, π_{13} und π'_{23} die Nullebenen der resp. Punkte B_4, C_1, C_4, A_4.

Zugleich sind aber auch die Punkte der zweiten 12_3 den Ebenen derselben zugeordnet. So ist z. B. P_{12} als Schnitt der Ebenen π'_{12}, π_{34}, π'_{34} der Nullpunkt der Ebene $\overline{B_1B_3B_2}$ oder β_4.

Die 4 Punkte eines Quadrupels separirter Punkte sind stets die Nullpunkte der 4 Ebenen eines Quadrupels separirter Ebenen.

Da man die Punkte eines Quadrupels separirter Punkte auf 4 Arten den Ebenen jedes der 3 Quadrupel separirter Ebenen derselben Configuration 12_3 in der angegebenen Weise zuordnen kann, so folgt:

Es gibt 12 Nullsysteme, in denen die Configuration 24_4 und jede der beiden Configurationen 12_3 sich selbst zugeordnet sind.

12.

In den vorhergehenden Paragraphen sind bereits mehrere Fälle nachgewiesen, in denen eine Configuration 24_4 collinear oder reciprok auf sich selbst bezogen ist. Wir wollen versuchen, in Folgendem die Zahl aller möglichen collinearen und reciproken Transformationen der Configuration 24_4 in sich selbst festzustellen.

Eine Configuration 24_4 ist, wie wir gesehen haben, völlig bestimmt durch ein Tetraeder und einen fünften Punkt (oder fünfte Ebene), indem sich durch Projection des Punktes aus den Kanten des Tetraeders auf die gegenüberliegenden Kanten 6 Punkte ergeben, welche mit ihren bezüglich der Tetraederecken harmonischen Punkten die 12 Punkte einer Configuration 12_3 sind.

Wenn man daher ein Quadrupel separirter Punkte einer Configuration 12_3 und einen beliebigen fünften Punkt derselben collinear oder reciprok auf ein Quadrupel separirter Elemente und einen fünften Punkt resp. eine fünfte Ebene einer beliebigen zweiten Configuration 12_3 bezieht, so entsprechen einander alle Elemente der beiden Configurationen.

Nun kann man aber, um beide Configurationen 12_3 zunächst collinear auf einander zu beziehen, z. B. das Tetraeder (A) jedem der 3 Tetraeder (A'), (B'), (C') der zweiten Configuration 12_3 zuweisen, und dies kann geschehen, indem man die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 den

Punkten eines Tetraeders, z. B. den Punkten A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, in beliebiger Reihenfolge zuordnet. Sie können so als der Reihe nach den Punkten

A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 oder A'_1, A'_2, A'_4, A'_3 u. s. w.

entsprechend angenommen werden. Es giebt mit anderen Worten ebensoviele Zuordnungen unter den Punkten zweier Tetraeder als Permutationen unter 4 Elementen, d. h. deren 24. Schliesslich kann aber der angenommene fünfte Punkt, sei es B_1, auf jeden beliebigen der übrigen 8 Punkte der zweiten Configuration bezogen werden. Es ergibt sich somit:

Eine Configuration 12_3 kann auf $3 . 24 . 8 = 576$ verschiedene Arten in eine zweite Configuration 12_3 und natürlich ebensooft in sich selbst collinear transformirt werden.

Da man hiernach eine der beiden Configurationen 12_3, aus denen eine Configuration 24_4 besteht, 576 mal auf verschiedene Weise in sich selbst — wobei sich allerdings eine identische Transformation befindet — und ebensooft in die zweite Configuration 12_3 collinear transformiren kann, so folgt:

Es gibt $2 . 576 = 1152$ collineare Transformationen einer Configuration 24_4 in sich selbst, von denen eine allerdings eine identische Transformation ist.

Damit ist zugleich die Zahl aller reciproken Transformationen der Configuration 24_4 in sich selbst gegeben. Da nämlich jedem Punkt der Configuration eine bestimmte Ebene gegenüberliegt, so kann man jeder collinearen Transformation der Configuration eine reciproke an die Seite stellen, bei welcher die 24 Punkte den resp. Ebenen

entsprechen, welche den entsprechenden Punkten der collinear transformirten Configuration gegenüberliegen. Also:

Es gibt 1152 reciproke Transformationen einer Configuration 24_4 in sich selbst.

Bei jeder der 2304 möglichen collinearen oder reciproken Transformationen einer Configuration 24_4 in sich selbst geht ein Quadrupel separirter Elemente wieder in ein Quadrupel separirter Elemente, jedes der 6 Tetraeder also wieder in ein Tetraeder, jedes der 24 Hexaeder in ein Hexaeder resp. Octaeder, und jedes der 24 Octaeder in ein Octaeder resp. Hexaeder über.

13.

Eine Configuration 12_3 wird durch eine collineare Transformation, bei welcher eine ihrer 12 Diagonalebenen der ∞ fernen Ebene entspricht, in die *Configuration eines Parallelepipeds* verwandelt, indem stets eins der 12 Hexaeder der transformirten Configuration, wie man auch die Lage der übrigen Elemente wählen mag, die Gestalt eines Parallelepipeds annimmt.

Das Parallelepiped ist ein rechtwinkliges, wenn die 3 nicht im ∞ liegenden Seitenflächen des Tetraeders, zu welchem die ∞ ferne Ebene gehört, auf einander senkrecht stehen.

Ordnet man speciell einen fünften Punkt der Configuration einem Punkt zu, welcher von 2 jener 3 Tetraederebenen gleiche Entfernung hat, so wird das Parallelepiped quadratisch, und hat dieser Punkt auch von der dritten Tetraederebene dieselbe Entfernung, so geht die

Configuration 12_3 durch eine solche Transformation in die *Configuration eines Würfels* über.

Letztere enthält die 6 Seitenflächen und 6 Diagonalebenen des Würfels; die 8 Eckpunkte, den Mittelpunkt und die 3 im ∞ liegenden Schnittpunkte seiner parallelen Kanten, endlich seine 12 Kanten und 4 Diagonalen.

Zugleich verwandelt sich die zugehörige zweite Configuration 12_3 in die *Configuration eines regulären Octaeders.*

Dieselbe wird gebildet von den 8 Octaederflächen, seinen 3 Diagonalebenen und der ∞ fernen Ebene; den 6 Eckpunkten und den 6 ∞ fernen Punkten seiner 6 Paar paralleler Kanten; endlich von den 12 Kanten und den 4 ∞ fernen Geraden seiner 4 Paar paralleler Ebenen.

Ferner wird eine Configuration 12_3 durch eine collineare Transformation, bei welcher ein Quadrupel separirter Punkte den Ecken eines Tetraeders entspricht, dessen eine Kante im ∞ liegt, in die *Configuration einer abgestumpften vierseitigen Pyramide* übergeführt, und die zugehörige zweite 12_3 geht zugleich in die Configuration einer zweiten abgestumpften Pyramide über, deren Durchdringung mit jener ersten einen trapezoederförmigen Körper liefert.

Steht nicht nur die jener im ∞ angenommenen Tetraederkante gegenüberliegende Kante auf den durch erstere gehenden parallelen Ebenen senkrecht, sondern bilden auch die beiden anderen durch sie gehenden Tetraederflächen einen rechten Winkel, so gehören jene beiden Pyramiden und ihre Durchdringung im allgemeinen dem rhombischen und nur dann dem quadratischen

System an, wenn man einen fünften Punkt der Configuration einem Punkt zuweist, welcher in einer der beiden Halbirungsebenen jener 2 auf einander senkrechten Tetraederflächen liegt.

Gehört ausserdem dieser fünfte Punkt einer durch die ∞ ferne Tetraederkante gehenden Ebene an, welche von ihrer harmonischen Ebene bezüglich der beiden parallelen Tetraederflächen dieselbe Entfernung hat, wie diese letzteren von einander, so sind die beiden quadratischen Pyramiden congruent und die Configuration 24_4 stellt die *Configuration des Trapezoeders* dar.

14.

In Bezug auf die Kugel, welche einem Würfel eingeschrieben werden kann, ist die zugehörige Configuration 24_4 zu sich selbst polar. Die Würfelconfiguration 12_3 aber ist zu der Octaederconfiguration 12_3 polar. Die genannte Kugel ist also die Ordnungsfläche eines räumlichen Polarsystems, in welchem die Configuration 24_4 zu sich selbst polar ist. Sie wird von 6 Ebenen der ersten 12_3, den Würfelflächen, in 6 Punkten der zweiten 12_3, den Octaederecken, und demnach in jedem dieser Punkte auch von 2 Geraden der Configuration 24_4 berührt.

Denkt man sich nun die Würfelconfiguration auf irgend eine Weise in eine der beiden 12_3 einer allgemeinen Configuration 24_4 collinear oder reciprok transformirt, wobei der Würfel stets in eins der 24 Hexaeder resp. Octaeder der Configuration 24_4 übergeht, so folgt:

Es gibt 24 räumliche Polarsysteme mit reellen

Ordnungsflächen (nicht geradlinigen Flächen zweiter Ordnung), in welchen die Configuration 24_4 zu sich selbst und die beiden Configurationen 12_3 zu einander polar sind.

Durch jede der 2304 collinearen oder reciproken Transformationen gelangt man zu einem dieser 24 Polarsysteme und zwar führen immer 48 collineare und 48 reciproke Transformationen zu einem und demselben Polarsystem, indem ein Hexaeder auf 48 verschiedene Arten collinear und ebensooft reciprok in sich selbst transformirt werden kann.

15.

Die 24 Ordnungsflächen dieser 24 Polarsysteme haben eine interessante gegenseitige Lage.

Jede derselben wird zunächst in den 6 Punkten eines Octaeders von den 6 Ebenen des zugehörigen Hexaeders und von 12 der 18 Kanten k berührt.

Die 6 sie nicht berührenden Geraden k sind die Kanten eines der drei Tetraeder (A), (B), (C), welches Poltetraeder der Fläche ist. Derjenige Eckpunkt dieses Tetraeders, welcher innerhalb der Fläche liegt, ist der einzige innerhalb derselben liegende Configurationspunkt, und die ihm gegenüberliegende Tetraederfläche ist die einzige Configurationsebene, welche die Fläche weder berührt noch schneidet. Zu jedem der 24 Punkte (und seiner gegenüberliegenden Ebene) gehört in dieser Weise eine der 24 Flächen.

Je 4 der 24 Flächen zweiter Ordnung, welche zu einem Quadrupel separirter Punkte, also auch zu einem

Quadrupel separirter Ebenen, mit einem Wort zu einem der 6 Tetraeder der Configuration gehören, mögen ein Quadrupel separirter Flächen genannt werden. Das genannte Tetraeder ist ein gemeinschaftliches Poltetraeder der 4 Flächen des Quadrupels.

Die 6 Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraeders enthalten die sämmtlichen 12 Berührungspunkte der 4 Flächen des Quadrupels separirter Flächen mit den Ebenen und Geraden der Configuration. Da nun die beiden ausser den Eckpunkten des Tetraeders auf einer dieser Kante liegenden Punkte der Configuration auf jeder der beiden Flächen zweiter Ordnung liegen, die zu den beiden betreffenden Eckpunkten des Tetraeders gehören, und da ferner die beiden ausser den beiden Tetraederflächen durch eine Kante gehenden Ebenen die 2 zu jenen Tetraederflächen gehörenden Flächen zweiter Ordnung berühren, so ergibt sich:

Je zwei Flächen eines Quadrupels separirter Flächen zweiter Ordnung, z. B. a_1^2 und a_2^2, werden in den beiden Configurationspunkten P_{12} und P'_{12}, welche auf der Verbindungslinie ihrer entsprechenden Punkte A_1 und A_2 liegen, gemeinschaftlich berührt von den beiden Ebenen π_{12} und π'_{12}, welche durch die Schnittlinie ihrer entsprechenden Ebenen α_1 und α_2 gehen.

Durch einen solchen Berührungspunkt zweier Flächen eines Quadrupels separirter Flächen zweiter Ordnung gehen aber im Ganzen 3 Geraden der Configuration 24$_1$. Folglich ist jeder Punkt der Configuration zugleich Berührungspunkt von 3 zu verschiedenen Quadrupeln gehörenden Paaren von Flächen zweiter Ordnung. Analog

ist jede Ebene der Configuration zugleich Berührungsebene von 3 Paaren von Flächen zweiter Ordnung.

Da ferner durch jede Gerade der Configuration 4 Ebenen gehen, von denen jede in 2 der 4 Punkte der Geraden je 1 Paar der 24 Flächen zweiter Ordnung berührt, so folgt:

Jede der 18 Geraden der Configuration 24_4 ist gemeinschaftliche Tangente an 16 der 24 Flächen zweiter Ordnung.

Zwei Flächen, welche verschiedenen Quadrupeln separirter Flächen, aber 2 Punkten derselben 12_3 angehören, z. B. a_1^2 und b_1^2 schneiden einander in einer Curve zweiter Ordnung und werden von einem Kegel zweiter Ordnung gemeinschaftlich berührt. Die Ebene des Kegelschnitts ist eine Configurationsebene, nämlich diejenige Ebene γ_1, welche mit den Ebenen α_1 und β_1 eine Gerade h' gemein hat, und der Mittelpunkt des genannten Kegels ist der mit A_1 und B_1 auf einer Geraden h liegende Configurationspunkt C_4.

16.

Je 4 Seitenflächen eines Würfels, welche durch einen ∞ fernen Punkt gehen, enthalten 8 der die eingeschriebene Kugel berührenden Geraden k. Dieselben liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung (Rotationshyperboloid), welche die Kugel in einem Kreis berührt, und in Bezug auf welche die Würfelconfiguration der Octaederconfiguration und die Configuration 24_4 sich selbst polar ist. Vier der 8 Geraden gehören der einen, die 4 übrigen der anderen Regelschaar dieser Fläche zweiter

Ordnung an; die letztere enthält also 16 Punkte der Configuration 24_4 und wird in jedem derselben von einer Configurationsebene berührt. Die 10 nicht auf der Fläche liegenden Geraden k sind die Kanten zweier der 6 Tetraeder der Configuration 24_4. Dieselben haben 2 gegenüberliegende Kanten mit einander gemein, und diese enthalten daher zu je 4 die 8 Punkte der Configuration 24_4, welche nicht auf jener Fläche liegen, und sind zugleich die Schnittlinien von je 4 der 8 Configurationsebenen, welche jenen Punkten entsprechen und die Fläche nicht berühren.

Transformirt man die Würfelconfiguration in eine der beiden Configurationen 12_3 einer allgemeinen Configuration 24_4 und berücksichtigt, dass die 18 Geraden der letzteren 9 Paare gegenüberliegender Kanten bilden, so folgt:

Die 18 Geraden einer Configuration 24_4 liegen zu je 8 in 9 Flächen zweiter Ordnung, in Bezug auf welche die Configuration 24_4 zu sich selbst und die beiden Configurationen 12_3 zu einander polar sind.

Jede dieser 9 Flächen wird in 16 Configurationspunkten von 16 Ebenen der Configuration berührt; jede der übrigen 8 Ebenen schneidet dieselbe in einem Kegelschnitt, in welchem die Fläche zwei der 24 nicht geradlinigen Flächen zweiter Ordnung berührt; und jeder der nicht auf ihr liegenden Punkte ist die Spitze eines Kegels zweiter Ordnung, welcher die geradlinige Fläche und zwei der 24 nicht geradlinigen Flächen in einem der genannten Kegelschnitte berührt.

Durch jeden der 24 Punkte der Configuration gehen 6 der 9 geradlinigen Flächen zweiter Ordnung; dieselben

haben dort paarweise mit je 2 der 24 nicht geradlinigen Flächen eine gemeinschaftliche Berührungsebene. Analog ist jede der 24 Ebenen der Configuration Berührungsebene von 6 der 9 geradlinigen Flächen, indem sie mit je 2 derselben und zugleich mit 2 jener 24 nicht geradlinigen Flächen einen Berührungspunkt gemein hat. Jede Gerade k liegt auf 4 der 9 geradlinigen Flächen, mit einer fünften hat sie keinen Punkt gemein und die 4 übrigen schneidet sie zu je 2 in einem Paar ihrer 4 harmonischen Configurations-Punkte.

Fig 1.

Die Configuration 24_4 im Falle des Würfels.

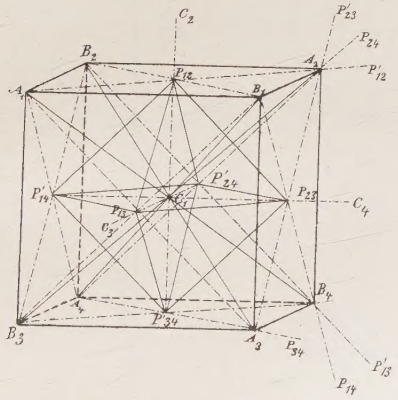


Fig. 2.
Figur zu S. 11.

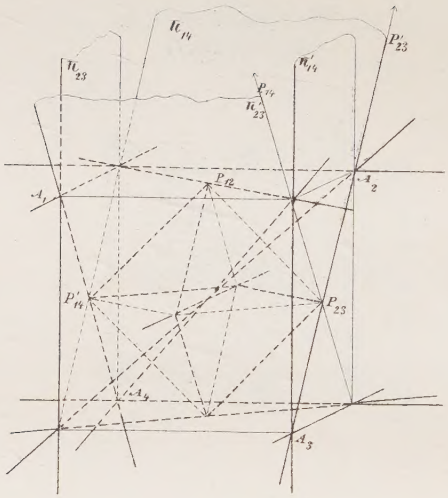
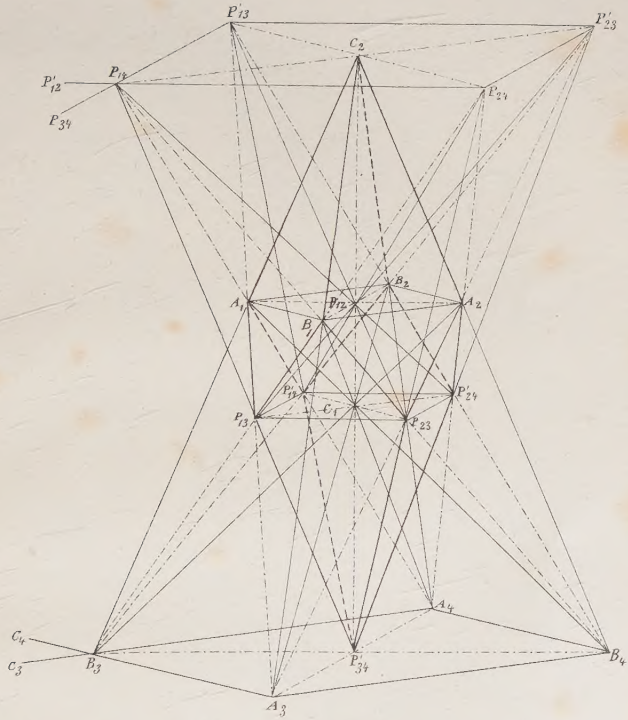


Fig 3.

Die Configuration des Trapezoeders.